FIT ČVUT

MI-LOM

Lineární optimalizace a metody

Cvičení — teoretická část. Okruhy ke zkoušce.

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Michal Černý, 2011

(1) **Obecné vlastnosti a geometrie polyedrů a lineárních programů.** Připomeňme, že polyedr $\mathcal{F} := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$ se nazývá *přípustný prostor* lineárního programu $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$. *Optimální prostor* $\mathcal{O}$ tohoto lineární programu je množina všech optimálních řešení.

(a) Nechť $\mathcal{O} \neq \emptyset$. Ukažte, že $\mathcal{O}$ je polyedr.

(b) Sestrojte příklad lineárního programu, pro který platí, že polyedr $\mathcal{O}$ je neomezený.

(c) Sestrojte příklad lineárního programu, pro nějž platí $\mathcal{O} = \mathcal{F}$.

(d) K danému n sestrojte příklad lineárního programu, pro nějž platí $\mathcal{O} = \mathcal{F}$ a $\mathit{dim}(\mathcal{F}) = n$. (Symbol *dim* značí afinní dimensi.)

(e) K danému n sestrojte příklad lineárního programu, pro nějž platí $\mathit{dim}(\mathcal{F}) = n$ a $\mathit{dim}(\mathcal{O}) = n - 1$.

(f) Nechť $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$ jsou dva různé body v $\mathcal{O}$. Ukažte, že celá úsečka spojující body $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$ je v $\mathcal{O}$. (To znamená: libovolná konvexní kombinace dvou optimálních řešení je také optimální řešení.) Argument rozšiřte na obecný (konečný) počet bodů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{O}$: ukažte, že libovolná konvexní kombinace bodů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{O}$ je také optimální řešení.

(g) Nechť $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ je rovnoběžnostěn určený hranami $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ (kde vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou lineárně nezávislé). [Pro úplnost: rovnoběžnostěn $\mathcal{R}$ je „sešlápnutá krychle“ — je to mnohostěn s vrcholy

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i : \lambda_1 \in \{0,1\}, \ldots, \lambda_n \in \{0,1\} \right\}.]$$

Popište rovnoběžnostěn $\mathcal{R}$ jako polyedr: najděte matici $\boldsymbol{A}$ a vektor $\boldsymbol{b}$ tak, aby platilo $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$. [Návod: uvažte lineární zobrazení, které zobrazuje krychli $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{1}\}$ na rovnoběžnostěn $\mathcal{R}$, a užijte (h).]

(h) Nechť $\boldsymbol{\Omega}$ je regulární matice. Definujme lineární zobrazení $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}$. Nechť je dán polyedr $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$. Ukažte, že $\mathcal{F}' := f(\mathcal{F})$ je polyedr: najděte matici $\boldsymbol{A}'$ a vektor $\boldsymbol{b}'$ takové, že $\mathcal{F}' = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}'\}$. (Jinými slovy: zjistěte, jak se promítá polyedr $\mathcal{F}$ při zobrazení f.)

(i) Nechť $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť polyedr $\mathcal{F}'$ vznikne z polyedru $\mathcal{F}$ rotací roviny $\mathbb{R}^2$ ve směru hodinových ručiček o úhel φ (střed rotace je v počátku souřadného systému). Najděte matici $\boldsymbol{A}'$ a vektor $\boldsymbol{b}'$, pro které platí $\mathcal{F}' = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}'\}$. [Hint: užijte řešení předchozí úlohy; zkuste se také ve Wikipedii podívat na heslo *rotation matrix*.]

(j) Zobecněte předchozí úlohu pro případ, kdy střed rotace je v daném bodě $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^2$.

(k) (2d-vizualizace 3d-polyedrů) Nechť je dán polyedr $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ a rovina $R := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Najděte kolmý průmět polyedru $\mathcal{F}$ do roviny R. (Rovinu R chápejme jako stínítko; budeme-li na polyedr $\mathcal{F}$ svítit ve směru kolmém na stínítko R, jaký uvidíme stín? Nebo jinak: dívá-li se pozorovatel na polyedr $\mathcal{F}$ ve směru $\boldsymbol{a}$, jaký dvojrozměrný obraz vidí?)

(ℓ) Nechť lineární program $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}\}$, kde $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$, má optimum. Dokažte: jestliže polyedr $\mathcal{F}$ má vrchol, pak má také optimální vrchol. Sestrojte dále příklad lineárního programu, který má optimum, ale nemá optimální vrchol.

(m) Nechť $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$ je neprázdný omezený polyedr. Navrhněte algoritmus, který nalezne všechny vrcholy polyedru $\mathcal{F}$. (Dal by se k tomu nějak využít nápad, na kterém je založen simplexový algoritmus?) Ukažte dále, že tento problém nelze řešit v polynomiálním čase.

(n) Nechť $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$ je neprázdný omezený polyedr. Navrhněte algoritmus, který nalezne všechny optimální vrcholy lineárního programu $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}\}$. Ukažte dále, že tento problém nelze řešit v polynomiálním čase.

(o) Nechť simplexový algoritmus našel optimální vrchol $\boldsymbol{x}_0$. Navrhněte, jak simplexový algoritmus zobecnit, aby dokázal také odpovědět na otázku, zdali existuje i nějaký další optimální vrchol. (Návod: mohly by nějak pomoci nulové složky vektoru $\boldsymbol{y}$? Pro jednoduchost uvažte případ, kdy vrchol $\boldsymbol{x}_0$ není degenerovaný.)

(p) Nechť $\mathcal{F}$ je neprázdný polyedr splňující $\mathcal{F} \subseteq \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$. Dokažte, že $\mathcal{F}$ má vrchol.

(2) **Dualita.**

(a) Optimální smíšená strategie maticové hry se dá najít pomocí jistého lineárního programu. Sestrojte duál k tomuto lineárnímu programu. Má tento duální lineární program nějakou zajímavou interpretaci?

(b) Sestrojte duál k lineárnímu programu $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{1}\}$.

(c) Nechť je dána matice $\boldsymbol{A}$ a vektor $\boldsymbol{b}$. Řešení optimalizační úlohy

$$\min\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_1 : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

kde $\|\cdot\|_k$ značí L_k-normu, lze najít pomocí jistého lineárního programu. Sestrojte jeho duál.

(d) Nechť je dána matice $\boldsymbol{A}$ a vektor $\boldsymbol{b}$. Řešení optimalizační úlohy

$$\min\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_\infty : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

lze najít pomocí jistého lineárního programu. Sestrojte jeho duál.

(e) Nechť je dán vektor $\boldsymbol{c}$ a matice $\boldsymbol{A}$. Sestrojte duál k lineárnímu programu

$$\max\{w \in \mathbb{R} : \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = w \cdot \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = 1,\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0},\ w \geqslant 0\}.$$

(f) Sestrojte duál k lineárnímu programu $\min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$.

(g) Sestrojte duál k lineárnímu programu $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{0}\}$.

(h) Sestrojte duál k obecným lineárním programům ve tvaru

$$\max\Big\{\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{c}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_3 : (\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2\ \boldsymbol{A}_3)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{smallmatrix}\right) \leqslant \boldsymbol{b}_1,$$
$$(\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \boldsymbol{B}_3)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{b}_2,\quad (\boldsymbol{C}_1\ \boldsymbol{C}_2\ \boldsymbol{C}_3)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{smallmatrix}\right) \geqslant \boldsymbol{b}_3,\quad \boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}_2 \leqslant \boldsymbol{0}\Big\}$$

a

$$\min\Big\{\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{c}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_3 : (\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2\ \boldsymbol{A}_3)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{smallmatrix}\right) \leqslant \boldsymbol{b}_1,$$
$$(\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \boldsymbol{B}_3)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{b}_2,\quad (\boldsymbol{C}_1\ \boldsymbol{C}_2\ \boldsymbol{C}_3)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{smallmatrix}\right) \geqslant \boldsymbol{b}_3,\quad \boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}_2 \leqslant \boldsymbol{0}\Big\}.$$

V obou případech je proměnná $\boldsymbol{x}_3$ neomezená.

(i) Nalezněte příklad primárního lineárního programu P, pro nějž a pro jehož duál D platí

- P i D jsou nepřípustné,
- P je přípustný a D je nepřípustný,
- P je nepřípustný a D je přípustný,
- P i D jsou přípustné.

Jak spolu souvisí neomezenost P s nepřípustností D?

(j) (Complementary Slackness Theorem) Mějme primární lineární program

$$\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}\}$$

a jeho duál

$$\min\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}\},$$

kde $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$ je primární polyedr a $\mathcal{G} = \{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ je duální polyedr. K danému $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ definujme

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

(to je tzv. *slack vector* — říká totiž, o kolik je levá strana nerovnosti $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$ menší než pravá strana). Ukažte, že platí následující věta: *body $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ a $\boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$ jsou optimální pro primární a duální lineární program, právě když platí $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.*

Poznámka. Zde násobením $\cdot$ se rozumí násobení po složkách:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ v_2 w_2 \\ \vdots \\ v_n w_n \end{pmatrix}.$$

[Návod: všimněte si — a dokažte podrobně —, že pro nezáporné vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ platí $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, právě když $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 0$. Užijte také větu o dualitě (o nulovém duality gapu v optimu).]

(k) (Farkasovo lemma) Ukažte, že platí: *neexistuje žádný nezáporný vektor $\boldsymbol{x}$ splňující systém $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, právě když existuje $\boldsymbol{y}$ tak, že $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0$.* (Geometrický náhled. Nechť $\mathcal{F}$ je konus generovaný vektory $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k$ (tj. $\mathcal{F} = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{z}_i : \lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0\}$), kde $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k$ jsou sloupce matice $\boldsymbol{Z}$. Lemma tvrdí: bod $\boldsymbol{b}$ neleží v konu $\mathcal{F}$, právě když je možné jistou nadrovinou určenou vektorem $\boldsymbol{y}$ konus $\mathcal{F}$ od bodu $\boldsymbol{b}$ oddělit.) [Návod. Farkasovo lemma je snadným důsledkem věty o dualitě; stačí ji užít na vhodný lineární program.]

(3) **Kososymetrie (skew-symmetry).** Připomeňme, že matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá *kososymetrická*, platí-li $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$. Nechť $\boldsymbol{A}$ i nadále označuje kososymetrickou matici.

(a) Dokažte tzv. *ortogonální lemma*: pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$.

(b) Definujme funkci $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Dokažte, že vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ jsou kolmé.

(c) Maticová hra se nazývá *symetrická*, má-li kososymetrickou výplatní matici. Dokažte, že cena každé symetrické hry je nula. (Návod: použijte větu o dualitě a ortogonální lemma.)

(4) **Geometrie elipsoidů.**

(a) Najděte nejmenší elipsoid obsahující n-rozměrný obdélník s množinou vrcholů $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \alpha_i \boldsymbol{e}_i : \lambda_1 \in \{-1, 1\}, \ldots, \lambda_n \in \{-1, 1\}\}$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kladná čísla a $\boldsymbol{e}_i$ je i-tý sloupec jednotkové matice.

(b) Nechť $E = \mathcal{E}(\mathbf{0}, \boldsymbol{E})$. Ukažte, že pro regulární zobrazení $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}$ platí $f(E) = \mathcal{E}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}})$. (To jest: regulární lineární zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}$ zobrazuje elipsoid E na elipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}})$.)

(c) Zobecněte (b) pro obecný elipsoid $E = \mathcal{E}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{E})$.

(d) Dokažte, že pro $\xi \neq 0$ platí $e^{\xi} > 1 + \xi$.

(e) Najděte nejmenší elipsoid obsahující polyedr $\mathcal{R}$ ze cvičení (1)(g).

(f) (Mělké elipsoidové řezy.) Nechť je dána koule $K \subseteq \mathbb{R}^n$ s poloměrem 1 se středem v $\mathbf{0}$. Nechť je dáno číslo $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{n}$. Najděte nejmenší (co do objemu) elipsoid obsahující množinu $K \cap \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \gamma\}$, kde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$.

- $*$ Zjistěte, co by se stalo, kdybychom namísto $\gamma \in [0, \frac{1}{n})$ povolili libovolné číslo $\gamma \in [0, 1]$.
- $*$ Zobecněte mělký řez pro situaci, kdy $\boldsymbol{a}$ je libovolný nenulový vektor. [Tip: nejprve uvažte případ, kdy $\|\boldsymbol{a}\| = 1$; poté zobecněte na libovolné $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$].
- $*$ Zobecněte mělký řez pro případ, kdy $\boldsymbol{a}$ je libovolný nenulový vektor a K je libovolný elipsoid se středem v nule.

(g) (Paralelní elipsoidové řezy.) Nechť je dána koule $K \subseteq \mathbb{R}^n$ s poloměrem 1 se středem v $\mathbf{0}$. Nechť je dáno číslo $0 < \gamma < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Najděte nejmenší (co do objemu) elipsoid obsahující množinu $K \cap \{\boldsymbol{x} : -\gamma < \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \gamma\}$, kde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$.

- $*$ Zjistěte, co by se stalo, kdybychom namísto $\gamma \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ povolili libovolné číslo $\gamma \in (0, 1]$.
- $*$ Zobecněte paralelní řez pro situaci, kdy $\boldsymbol{a}$ je libovolný nenulový vektor.
- $*$ Zobecněte paralelní řez pro situaci, kdy $\boldsymbol{a}$ je libovolný nenulový vektor a K je libovolný elipsoid se středem v nule.

(h) Ukažte, že elipsoidy vzniklé v (f) a v (g) mají ostře menší objem než původní elipsoid (koule).

(i) Modifikujte elipsoidový algoritmus, aby místo centrálních řezů užíval, pokud možno, hluboké řezy. [Elipsoidový řez je *hluboký*, odřízne-li více než polovinu elipsoidu.] Dokažte větu o konvergenci po polynomiálním počtu iterací.

(5) **Racionální polyedry.**

(a) Nechť je dán obecný racionální systém $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$, jehož *size* (= velikost bitové reprezentace) je L. Prokažte podrobně, že v polynomiálním čase (tj. v čase $\mathit{poly}(L)$) lze najít ekvivalentní systém $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}'$ s celočíselnými koeficienty. V jakém řádu se *size* obou systémů může v nejhorším případě lišit? [Přesněji: odhadněte k, pro nějž platí $L' = O(L^k)$, kde L je *size* systému $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$ a L' je *size* systému $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}'$.]

(b) Nechť je dán obecný racionální systém $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$. Zjistěte, v jakém řádu se (v nejhorším případě) může jeho *size* zvětšit při převodu do Chačijanova normálního tvaru.

(c) Nechť $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}\}$ je polyedr, který má vrchol. Prokažte, že existuje polynom p takový, že platí: jestliže existuje $\xi^* := \max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}\}$, pak platí $|\xi^*| \leqslant 2^{p(L)}$, kde $L = \mathit{size}(\boldsymbol{A}) + \mathit{size}(\boldsymbol{b}) + \mathit{size}(\boldsymbol{c})$. Zkuste dále najít takový polynom p co nejnižšího stupně.

(d) S užitím podobné ideje jako v (c) navrhněte polynomiální metodu, jak testovat neomezenost daného polyedru $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\}$, můžete-li jako podprogram („blackbox“) užívat algoritmus pro nekonstruktivní rozhodovací verzi lineárního programování, o kterém víte, že pracuje v polynomiálním čase.

Okruhy ke zkoušce.

- *Základní pojmy.* Polyedr, vrchol, hrana, báze, dimenze, omezenost/neomezenost polyedru, omezenost/neomezenost LP, přípustnost/nepřípustnost LP. Geometrie lineárních programů. Degenerace. Rozdíl mezi lineárním a celočíselným programováním.
- *Formulace konkrétních úloh lineárního a celočíselného programování.*
- *Aparát lineární algebry.* Lineární, afinní, kónická, konvexní kombinace. Konvexní množiny. Velikost zápisu racionálních čísel. Velikost zápisu determinantu celočíselné matice, velikost zápisu řešení soustavy lineárních rovnic s celočíselnými koeficienty, velikost zápisu vrcholu racionálního polyedru. Pozitivně definitní matice, elipsoidy. Normy. Polynomialita Gaussovy eliminace, výpočtu determinantu, výpočtu inverze.
- *Simplexový algoritmus.* I. fáze a II. fáze. Jedna iterace simplexového algoritmu; test na optimum, test na neomezenost, výběr vystupujícího a vstupujícího indexu. Geometrie simplexového algoritmu. Blandova věta. Klee-Mintyho věta (bez důkazu).
- *Dualita.* Konstrukce duálních lineárních programů. Slabá věta o dualitě. Silná věta o dualitě.
- *Rozhodovací a optimalizační verze LP.* Polynomiální redukce optimalizační verze LP na konstruktivní rozhodovací verzi LP. Polynomiální redukce konstruktivní rozhodovací verze na nekonstruktivní rozhodovací verzi.
- *Elipsoidový algoritmus.* Chačijanův normální tvar, ořezávací lemma, nafukovací lemma. Centrální elipsoidové řezy, odhad na objem elipsoidu vzniklého řezem. Princip a geometrie elipsoidového algoritmu, volba počáteční koule, dolní odhad na objem polyedru, odhad na počet iterací.
- *Autoduální vnoření lineárního programu.* Konstrukce autoduálního vnoření, homogenizační proměnná, regularizační proměnná. Vlastnosti a význam autoduálního vnoření.
- *Algoritmy vnitřního bodu.* Interior Point Condition. Slack. Complementary Slackness Theorem. μ-centrum, centrální cesta, striktně komplementární optimum. Bazické a nebazické indexy; věta o rozkladu indexové množiny na bazické a nebazické proměnné (bez důkazu). Newtonovský krok. Bariérový parametr μ, strategie snižování hodnoty bariérového parametru (volba barrier

update parametru θ). Věta o kvadratické konvergenci newtonovského kroku (bez důkazu). Varianční vektor, δ-norma, δ-okolí. Condition number. Věta „condition number nemůže být úplně malé“ (bez důkazu). Okamžik ukončení algoritmu (volba ε). Odhad na počet iterací.

- Celočíselné programování, geometrie celočíselného programování, branch-and-bound, $\boldsymbol{NP}$-těžkost ILP.